ÉDITIONS MILAGNETSARA

BAC · SÉRIE C · MATHÉMATIQUES

10 sujets types corrigés pas à pas

L'essentiel du cours en fiches, 10 sujets complets au format de l'épreuve (4 h, coefficient 5) et des corrigés rédigés comme une copie modèle.

Fanazaran-tena hahombiazana amin'ny BAC — misy torohevitra amin'ny teny malagasy.

Arithmétique · Probabilités · Complexes · Similitudes · Coniques · Espace · Fonctions · Intégrales · Équations différentielles



MILAGNETSARA

Acheter. Connecter. Évoluer. · Farafangana

Édition 2026–2027

Ce livre a été écrit pour une seule raison : que tu entres dans la salle d'examen en sachant quoi faire.

Le BAC série C ne récompense pas celui qui a « vu » le plus d'exercices. Il récompense celui qui sait **reconnaître une question, choisir la bonne méthode et rédiger proprement en 4 heures**. C'est exactement ce que ce livre t'entraîne à faire.

- **10 sujets complets**, construits sur le format de l'épreuve : un exercice d'arithmétique et de probabilités, un problème de géométrie et de nombres complexes, un grand problème d'analyse.
- **Des corrigés rédigés comme une copie modèle** : chaque étape est justifiée, chaque résultat est mis en évidence. Tu vois ce que le correcteur attend.
- **L'essentiel du cours en 8 fiches** : toutes les formules et méthodes du programme, à relire la veille.
- **Des astuces en malagasy** pour retenir les points délicats avec tes propres mots.
- **Des encadrés « Erreur fréquente »** : les pièges qui coûtent des points chaque année.

Travaille un sujet par semaine, en conditions réelles, puis compare ta copie au corrigé. En dix semaines, la méthode devient un réflexe.

Mianara tsy tapaka, mandrosoa amin'ny fahatokisana.

Le mot de l'éditeur

Les Éditions MILAGNETSARA sont nées à Farafangana avec une conviction : un élève d'Atsimo Atsinanana mérite les mêmes outils de réussite qu'un élève d'Antananarivo ou de l'étranger. Ce livre réunit un cours condensé, des sujets d'entraînement originaux et des corrigés détaillés, en français, avec des repères en malagasy.

Les sujets de ce livre sont des **sujets types** : ils ont été préparés par les Éditions MILAGNETSARA sur le modèle de l'épreuve, pour l'entraînement. **Ce ne sont pas des sujets officiels.** Aucun livre ne peut garantir la réussite à un examen. Celui-ci t'aide à travailler avec régularité et méthode, et c'est ce travail qui fait la différence.

Sommaire

Partie 1	L'essentiel du cours en 8 fiches : arithmétique · probabilités · nombres complexes · géométrie plane et transformations · coniques et espace · suites · fonctions · intégrales et équations différentielles
Partie 2	10 sujets types complets et leurs corrigés détaillés
Partie 3	Plan de révision en 10 semaines · grille de suivi · conseils pour le jour de l'épreuve

L'épreuve de mathématiques en série C

Durée	4 heures
Coefficient	5 (la matière la plus lourde de la série C)
Matériel	calculatrice scientifique non programmable
Total	20 points

Le sujet comporte en général trois parties :

Partie	Contenu habituel	Points	Temps conseillé
Exercice	1. Arithmétique · 2. Probabilités	4	40 min
Problème I	Géométrie plane, transformations, nombres complexes (parfois coniques ou espace)	7	1 h 20
Problème II	Étude de fonction, courbe, équation différentielle, suites, intégrales	9	1 h 45
Relecture	Vérifier les calculs, les résultats encadrés, la numérotation	—	15 min

COMMENT UTILISER CE LIVRE

1. **Avant chaque sujet**, relis la ou les fiches de cours concernées (Partie 1).
2. **Fais le sujet en conditions réelles** : 4 heures, sans corrigé, sans téléphone, avec ta calculatrice.
3. **Corrige-toi avec le barème** : note-toi honnêtement, question par question.
4. **Étudie le corrigé**, même pour les questions réussies : la rédaction compte autant que le résultat.
5. **Recopie les méthodes** que tu ne maîtrisais pas dans un petit carnet. C'est ton résumé personnel pour la dernière semaine.

💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***

Aza manomboka amin'ny fanontaniana sarotra indrindra. Vakio aloha ny lohahevitra manontolo, ataovy aloha izay fantatrao tsara, dia miverena any amin'ny sisa. (Lis tout le sujet, commence par ce que tu sais faire, puis reviens au reste.)

Ce que le correcteur regarde

- **La justification** : un résultat juste sans justification ne rapporte presque rien. Cite la propriété utilisée (« d'après le théorème de Gauss… », « la fonction est continue et strictement croissante

sur… donc… »).

- **La rigueur des notations** : ensembles de définition, quantificateurs, égalités et équivalences au bon endroit.
- **La lisibilité** : une question par paragraphe, numérotation claire, résultats encadrés.
- **Les questions « Montrer que… »** : le résultat est donné. Même si tu bloques, **utilise-le** pour la suite : ne laisse jamais toute une partie vide.

> ⚠️ **ERREUR FRÉQUENTE**
>
> Perdre 30 minutes sur une question bloquante. Si tu sèches plus de 10 minutes, passe à la suite, en admettant le résultat demandé, et reviens-y à la fin.

Fiche 3 · Nombres complexes

Forme algébrique · module et argument · formes trigonométrique et exponentielle · Moivre et Euler · équations du second degré · racines n-ièmes · interprétation géométrique

1. Forme algébrique

$z = a + \mathrm{i}b$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ réels et $\mathrm{i}^2 = -1$. **Conjugué** : $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Propriété	Formule
Conjugué	$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
Caractérisations	z réel $\iff z = \overline{z}$; z imaginaire pur $\iff z = -\overline{z}$
Module	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$, $z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$, $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$, $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$
Quotient	$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$ (multiplier par le conjugué)

2. Formes trigonométrique et exponentielle

Pour $z \neq 0$, $r = \lvert z\rvert$ et $\theta = \arg z$ (défini à 2π près) vérifient $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$ et

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Règle	Formule
Produit, quotient	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$; $\arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$; $\arg\overline{z} = -\arg z \ \ [2\pi]$
Moivre	$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$, soit $\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$
Euler	$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ (linéarisation)
Valeurs à connaître	$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$; $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$; $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$; $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$; $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

3. Équations

- **Racines carrées** de $Z = \alpha + \mathrm{i}\beta$: on cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$ avec $\delta^2 = Z$:
$$x^2 - y^2 = \alpha, \qquad x^2 + y^2 = \lvert Z\rvert, \qquad 2xy = \beta \ \ (\text{donne le signe de } xy).$$
- **Équation** $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$, coefficients complexes) : $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\delta^2 = \Delta$, les solutions sont $z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ ($z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$). Si les coefficients sont **réels** et $\Delta < 0$: $z = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (solutions conjuguées).

- **Racine évidente** d'un polynôme de degré 3 : si $P(z_0)=0$, factoriser $P(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$ par identification.
- **Racines n-ièmes** de $Z=Re^{i\varphi}$ ($Z\neq 0$) : exactement n solutions

$$z_k = R^{1/n}\,e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$

  Pour $n\geq 2$, les racines n-ièmes de l'unité $e^{2ik\pi/n}$ ont une somme nulle et forment un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

4. Interprétation géométrique

Points A,B,C,D d'affixes z_A,z_B,z_C,z_D dans un repère orthonormé direct.

Notion	Traduction complexe
Vecteur, distance	$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$; $AB=\lvert z_B-z_A\rvert$; milieu : $\frac{z_A+z_B}{2}$
Angle orienté	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\ [2\pi]$
A,B,C alignés	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
$(AB)\perp(AC)$	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$
ABC isocèle rectangle en A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$; équilatéral : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\pm i\pi/3}$
Cercle, médiatrice	$\lvert z-z_A\rvert=R$: cercle de centre A ; $\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$: médiatrice de $[AB]$

MÉTHODE · RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS COMPLEXES

1. Calculer $\Delta=b^2-4ac$ sous forme algébrique $\alpha+i\beta$.
2. Chercher $\delta=x+iy$ avec $\delta^2=\Delta$ grâce au système des trois équations ci-dessus (x^2 et y^2 par somme et différence, puis le signe de xy donné par β).
3. Écrire $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$, puis **contrôler** : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

⚠ **ERREUR FRÉQUENTE**

L'argument n'est pas toujours $\arctan\frac{b}{a}$. Pour $z=-1-i$: $\frac{b}{a}=1$, mais $\arg z\neq\frac{\pi}{4}$! Ici $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arg z=-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Toujours déterminer θ par **son cosinus et son sinus** (repérer le quadrant). Autre piège : $\lvert z+z'\rvert\neq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$ en général.

> 💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***
>
> *Mba hanoratana z amin'ny endrika exponentielle, kajio aloha ny module $r = |z|$. Avy eo zarao amin'ny r ny ampahany roa, ka tadiavo ny zoro θ manana io $\cos\theta$ sy $\sin\theta$ io. (Calcule d'abord le module, puis trouve l'angle dont le cosinus et le sinus conviennent.)*

Mini-exemple corrigé

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (3+\mathrm{i})z + 4 + 3\mathrm{i} = 0$.

Corrigé. $\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(4+3\mathrm{i}) = 8 + 6\mathrm{i} - 16 - 12\mathrm{i} = -8 - 6\mathrm{i}$, et $|\Delta| = \sqrt{64+36} = 10$. On cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$: $x^2 - y^2 = -8$, $x^2 + y^2 = 10$, $2xy = -6$. Donc $x^2 = 1$, $y^2 = 9$ et $xy < 0$: $\delta = 1 - 3\mathrm{i}$. Ainsi

$$z_1 = \frac{3+\mathrm{i}+1-3\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}, \qquad z_2 = \frac{3+\mathrm{i}-1+3\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i}.$$

Contrôle : $z_1 z_2 = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} + 2 = 4 + 3\mathrm{i}$. $S = \{2 - \mathrm{i}\,;\ 1 + 2\mathrm{i}\}$.

Sujet 1 · Premiers pas vers le BAC

Congruences, équation $ax + by = c$, tirages simultanés · similitude directe · fonction avec exponentielle, équation différentielle, suite d'intégrales · niveau : ★★☆

SUJET 1 · ÉNONCÉ · 4 HEURES · COEFFICIENT 5

EXERCICE (4 points)

1. Arithmétique (2 points)

a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 de 2^0, 2^1, 2^2 et 2^3. En déduire, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 7. *(0,5 pt)*

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2026} par 7 ? Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n + 3$ soit divisible par 7. *(0,5 pt)*

c) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x - 7y = 5$. Vérifier que le couple $(3\,;4)$ est solution de (E), puis résoudre (E). *(0,5 pt)*

d) Déterminer les couples $(x\,;y)$ solutions de (E) tels que $0 \leq x \leq 40$ et $2^x + 3$ soit divisible par 7. *(0,5 pt)*

2. Probabilités (2 points)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 4 rouges, 3 vertes et 2 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « les trois boules tirées sont de la même couleur ». *(0,5 pt)*

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « on tire au moins une boule rouge ». *(0,5 pt)*

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de probabilité de X *(0,5 pt)*, puis calculer son espérance mathématique $E(X)$. *(0,5 pt)*

PROBLÈME I (7 points)

Le plan est orienté. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Partie A (3 points)

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(C) = A$ et $s(A) = B$. Déterminer son rapport k et une mesure de son angle θ. *(1 pt)*
2. On note Ω le centre de s. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AC]$ et au cercle de diamètre $[AB]$. En déduire que $\Omega = H$. *(1 pt)*
3. Déterminer les images par s des droites (AC), (BC) et (AB). En déduire une construction du point $E = s(B)$. *(1 pt)*

Partie B (4 points)

On munit le plan du repère orthonormé direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi $z_A=0$, $z_B=4$ et $z_C=2i$.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z'=2iz+4$. Retrouver k et θ. *(0,5 pt)*
2. Calculer l'affixe ω du centre de s. Vérifier que le point d'affixe ω appartient à la droite (BC) et que $(A\Omega)\perp(BC)$. *(0,75 pt)*
3. Calculer l'affixe z_E de $E=s(B)$ et vérifier la construction de la partie A. *(0,5 pt)*
4. Déterminer l'écriture complexe de $s\circ s$; en déduire sa nature et ses éléments caractéristiques. Montrer que $\overrightarrow{HB}=-4\,\overrightarrow{HC}$. *(1 pt)*
5. Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et $f=r\circ s$. Déterminer l'écriture complexe de f, sa nature et ses éléments caractéristiques. On note D le point invariant de f : préciser la position de D par rapport à A et C. *(1,25 pt)*

PROBLÈME II (9 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1+(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A — Étude de f (4 points)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x+2$. Étudier les variations de g et montrer que, pour tout réel x, $g(x)\geq 3$. *(0,75 pt)*
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. *(0,5 pt)*
3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}g(x)$. Dresser le tableau de variations de f. *(0,75 pt)*
4. Montrer que la droite (D) : $y=x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D). *(0,75 pt)*
5. Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point O. *(0,5 pt)*
6. Tracer (D), (T) et $(\mathcal{C})$. *(0,75 pt)*

Partie B — Équation différentielle (2 points)

On considère l'équation différentielle (E') : $y'+y=x+2+\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x+1+x\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E'). *(0,5 pt)*
2. Montrer qu'une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E') si et seulement si $\varphi-h$ est solution de l'équation (E_0) : $y'+y=0$. *(0,5 pt)*
3. Résoudre (E_0), puis en déduire toutes les solutions de (E'). *(0,5 pt)*
4. Montrer que f est l'unique solution de (E') qui s'annule en 0. *(0,5 pt)*

Partie C — Suite d'intégrales (3 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0. *(0,25 pt)*
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. *(0,75 pt)*
3. En déduire I_1 et I_2. *(0,5 pt)*
4. Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. *(0,5 pt)*
5. a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. *(0,25 pt)*

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n). *(0,75 pt)*

🎯 BARÈME ET CONSEILS

Partie	Points	Temps conseillé
Exercice : arithmétique + probabilités	4	35 min
Problème I : similitude (A géométrique, B complexe)	7	1 h 15
Problème II : fonction, équation différentielle, intégrales	9	2 h
Relecture	—	10 min

Commence par l'exercice : ce sont des points « sûrs ». Dans le problème II, les résultats sont donnés (« Montrer que… ») : si tu bloques sur une question, admets le résultat et continue.

Corrigé détaillé du sujet 1

Exercice — 1. Arithmétique

a) On a $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ et $2^3 = 8 = 7 \times 1 + 1$. Les restes sont donc respectivement 1, 2, 4 et 1.

Comme $2^3 \equiv 1\ [7]$, pour tout entier naturel k : $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1\ [7]$. Tout entier naturel n s'écrit $n = 3k + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$, et alors $2^n = 2^{3k} \times 2^r \equiv 2^r\ [7]$. D'où :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
reste de 2^n par 7	1	2	4

b) $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $2^{2026} \equiv 2^1\ [7]$: **le reste de 2^{2026} par 7 est 2.**

$2^n + 3 \equiv 0\ [7] \iff 2^n \equiv -3\ [7] \iff 2^n \equiv 4\ [7]$. D'après le tableau, cela se produit exactement lorsque $n = 3k + 2$.

$2^n + 3$ est divisible par 7 si et seulement si $n \equiv 2\ [3]$, c'est-à-dire $n \in \{2, 5, 8, \dots\}$.

c) $11 \times 3 - 7 \times 4 = 33 - 28 = 5$: le couple $(3\,;4)$ est bien solution de (E).

Soit $(x\,;y)$ une solution de (E). Par soustraction de $11x - 7y = 5$ et $11 \times 3 - 7 \times 4 = 5$:

$$11(x - 3) = 7(y - 4).$$

Donc 7 divise $11(x-3)$. Or $\text{PGCD}(7, 11) = 1$; d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x - 3$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3 + 7k$. En reportant : $11 \times 7k = 7(y - 4)$, d'où $y = 4 + 11k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $11(3 + 7k) - 7(4 + 11k) = 33 + 77k - 28 - 77k = 5$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(3 + 7k\,;\ 4 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

d) On cherche $x = 3 + 7k$ avec $0 \leq 3 + 7k \leq 40$, soit $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et $x \equiv 2\ [3]$ (question b).

Or $7 \equiv 1\ [3]$ et $3 \equiv 0\ [3]$, donc $x = 3 + 7k \equiv k\ [3]$. La condition devient $k \equiv 2\ [3]$, d'où $k = 2$ ou $k = 5$.

Les couples cherchés sont $(17\,;26)$ et $(38\,;59)$. (Contrôle : $11 \times 17 - 7 \times 26 = 187 - 182 = 5$.)

> 💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***
>
> *Raha mitady ny ambiny amin'ny fizarana 2^n amin'ny 7 ianao, tadiavo aloha ny hery voalohany manome ambiny 1. Avy eo dia miverimberina foana ireo ambiny. (Cherche la première puissance de reste 1 : ensuite les restes se répètent.)*

> ⚠️ **ERREUR FRÉQUENTE**
>
> Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut **écrire** que $\text{PGCD}(7, 11) = 1$. Et n'oublie pas la réciproque : vérifier que tous les couples trouvés sont bien solutions.

Exercice — 2. Probabilités

Les tirages sont simultanés : l'univers Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 9 boules. Les boules étant indiscernables au toucher, il y a équiprobabilité et

$$\operatorname{card}\Omega = \binom{9}{3} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84.$$

a) Trois boules de même couleur : trois rouges ($\binom{4}{3}=4$ façons) ou trois vertes ($\binom{3}{3}=1$ façon) ; trois blanches est impossible. Donc

$$P(A) = \frac{4+1}{84} = \boxed{\frac{5}{84}}.$$

b) L'événement contraire $\overline{B}$ est « aucune boule rouge » : les 3 boules sont choisies parmi les 5 non rouges.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{84} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84} = \boxed{\frac{37}{42}}.$$

c) X prend les valeurs 0, 1, 2, 3. Pour $j\in\{0,1,2,3\}$: $P(X=j) = \dfrac{\binom{4}{j}\binom{5}{3-j}}{84}$.

x_j	0	1	2	3
$P(X=x_j)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{4\times 10}{84} = \frac{40}{84}$	$\frac{6\times 5}{84} = \frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

Contrôle : $10+40+30+4 = 84$, la somme des probabilités vaut bien 1.

$$E(X) = 0\times\frac{10}{84} + 1\times\frac{40}{84} + 2\times\frac{30}{84} + 3\times\frac{4}{84} = \frac{112}{84} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

> 💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***
>
> *Raha misy hoe « farafahakeliny iray », dia kajio aloha ny mifanohitra aminy, avy eo analao amin'ny 1. (Pour « au moins un », calcule l'événement contraire puis retranche de 1.)*

Problème I — Partie A

1. On a $C\neq A$ et $A\neq B$. Or, étant donnés deux points distincts M, N et deux points distincts M', N', il existe une unique similitude directe envoyant M sur M' et N sur N'. **Il existe donc une unique similitude directe s telle que $s(C)=A$ et $s(A)=B$.**

Son rapport est $k = \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{4}{2}$, soit $k=2$. Son angle est $\theta = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$:

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

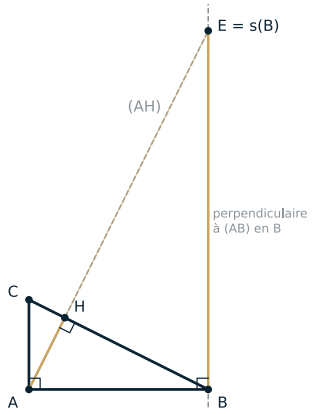


Figure 1 : triangle ABC, centre H de s et point E = s(B).

2. Comme $s(C) = A$, $\Omega \neq C$ (sinon $A = C$) et $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = \theta = \dfrac{\pi}{2}$: l'angle $\widehat{C\Omega A}$ est droit, donc Ω **appartient au cercle de diamètre** $[AC]$. De même, $s(A) = B$ donne $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \dfrac{\pi}{2}$: Ω **appartient au cercle de diamètre** $[AB]$.

Ces deux cercles passent par A, et aussi par H puisque les triangles AHC et AHB sont rectangles en H. Deux cercles distincts ont au plus deux points communs : ce sont A et H. Enfin $\Omega \neq A$, car $s(A) = B \neq A$. **Donc** $\Omega = H$**.**

3. L'image d'une droite par une similitude est une droite.

- (AC) passe par C et A, donc $s((AC))$ passe par $s(C) = A$ et $s(A) = B$: $s((AC)) = (AB)$.
- (BC) passe par H et C ; $s(H) = H$ et $s(C) = A$, donc $s((BC)) = (HA)$.
- (AB) passe par A ; son image passe par $s(A) = B$ et fait avec (AB) un angle de $\dfrac{\pi}{2}$: $s((AB))$ **est la perpendiculaire** δ **à** (AB) **en** B.

B appartient à (BC) et à (AB), donc $E = s(B)$ appartient à (AH) et à δ : E **est le point d'intersection de la droite** (AH) **et de la perpendiculaire à** (AB) **passant par** B**.**

> 🧭 **MÉTHODE**
>
> Pour trouver le centre d'une similitude « géométriquement » : chaque couple $(M, M' = s(M))$ donne $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$. Avec $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, Ω est sur le cercle de diamètre $[MM']$; deux couples donnent deux cercles, donc Ω.

Problème I — Partie B

1. s est une similitude directe, donc son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

$s(A) = B$ donne $a \times 0 + b = 4$, d'où $b = 4$. $s(C) = A$ donne $2ia + 4 = 0$, d'où $a = \dfrac{-4}{2i} = 2i$.

$$\boxed{s : z' = 2iz + 4}$$

On retrouve $k = |2i| = 2$ et $\theta = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2. Le centre est l'unique point invariant : $\omega = 2i\omega + 4 \iff \omega(1 - 2i) = 4$, donc

$$\omega = \frac{4}{1-2i} = \frac{4(1+2i)}{5} = \boxed{\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i}.$$

- Appartenance à (BC) : $z_B + \frac{4}{5}(z_C - z_B) = 4 + \frac{4}{5}(-4+2i) = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i = \omega$, donc $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$: $\Omega \in (BC)$.
- Orthogonalité : $\dfrac{\omega - z_A}{z_C - z_B} = \dfrac{4+8i}{5(-4+2i)} = \dfrac{(4+8i)(-4-2i)}{5 \times 20} = \dfrac{-40i}{100} = -\dfrac{2}{5}i$, imaginaire pur : $(A\Omega) \perp (BC)$.

On retrouve que Ω est le pied de la hauteur issue de A : $\Omega = H$.

3. $z_E = 2i \times 4 + 4 = \boxed{4+8i}$.

- $\mathrm{Re}(z_E) = 4 = \mathrm{Re}(z_B)$: E est sur la droite d'équation $x = 4$, perpendiculaire à (AB) (l'axe réel) en B.
- $z_E = 4 + 8i = 5\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i\right) = 5\, z_H$: $\overrightarrow{AE} = 5\,\overrightarrow{AH}$, donc $E \in (AH)$.

La construction de la partie A est confirmée.

4. Pour tout z : $s \circ s(z) = 2i(2iz+4) + 4 = -4z + 4 + 8i$.

$$\boxed{s \circ s : z' = -4z + 4 + 8i}$$

C'est l'écriture d'une homothétie de rapport -4. Son centre vérifie $z = -4z + 4 + 8i$, soit $z = \frac{4+8i}{5} = z_H$. $s \circ s$ **est l'homothétie de centre** H **et de rapport** -4 (ce qui est cohérent : rapport $2 \times 2 = 4$, angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$).

Or $s \circ s(C) = s(A) = B$, donc $\overrightarrow{HB} = -4\,\overrightarrow{HC}$.

5. La rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ a pour écriture $z' = \mathrm{e}^{-i\pi/2} z = -iz$. Donc

$$f(z) = -i(2iz+4) = 2z - 4i, \qquad \boxed{f : z' = 2z - 4i}.$$

f **est une homothétie de rapport** 2. Son centre D vérifie $z = 2z - 4i$, soit $z_D = 4i$.

Comme $z_D = 4i = 2z_C$, on a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$: D **est le symétrique de** A **par rapport à** C. Contrôle : $f(C) = r(s(C)) = r(A) = A$, et en effet $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DC}$.

> 💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***
>
> *Ny afovoan'ny similitude dia ilay teboka tsy miova : vahao ny $z = az + b$. (Le centre est le point invariant : résous $z = az + b$.)*

> 📌 **À RETENIR**
>
> Une similitude directe $z' = az + b$ ($a \neq 1$) a pour rapport $|a|$, pour angle $\arg a$ et pour centre $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Si a est réel, c'est une homothétie de rapport a.

Problème II — Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or $\mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff x < 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff x > 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (car $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-x \to +\infty$) et $g(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) + 2 \to +\infty$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

g admet en 0 un minimum égal à $g(0) = 1 - 0 + 2 = 3$. **Donc pour tout réel x, $g(x) \geq 3 > 0$.**

2. *En $+\infty$:* $(x-1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$; or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\mathrm{e}^{-x} = -\infty$; avec $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 1 + 1\times\mathrm{e}^{-x} + (x-1)(-\mathrm{e}^{-x}) = 1 + (2-x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + 2 - x\right) = \mathrm{e}^{-x}g(x).$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$ **pour tout x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.** On a $f(0) = 1 - 1 = 0$ et $f(1) = 2$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	3	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(x) - (x+1) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$, et on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\mathrm{e}^{-x} = 0$. **Donc $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.**

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f(x) - (x+1)$ a le signe de $x - 1$:

- sur $]-\infty\,;1[$, $(\mathcal{C})$ est **au-dessous** de (D) ;
- sur $]1\,;+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est **au-dessus** de (D) ;
- $(\mathcal{C})$ et (D) se coupent au point $(1\,;2)$.

5. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}$. En $-\infty$, $1 - \frac{1}{x} \to 1$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: **$(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).**

$f(0) = 0$ et $f'(0) = \mathrm{e}^0 g(0) = 3$: **$(T) : y = 3x$.**

6. Quelques valeurs : $f(-1) = -2\mathrm{e} \approx -5{,}44$; $f(-0{,}5) \approx -1{,}97$; $f(2) = 3 + \mathrm{e}^{-2} \approx 3{,}14$; $f(3) = 4 + 2\mathrm{e}^{-3} \approx 4{,}10$.

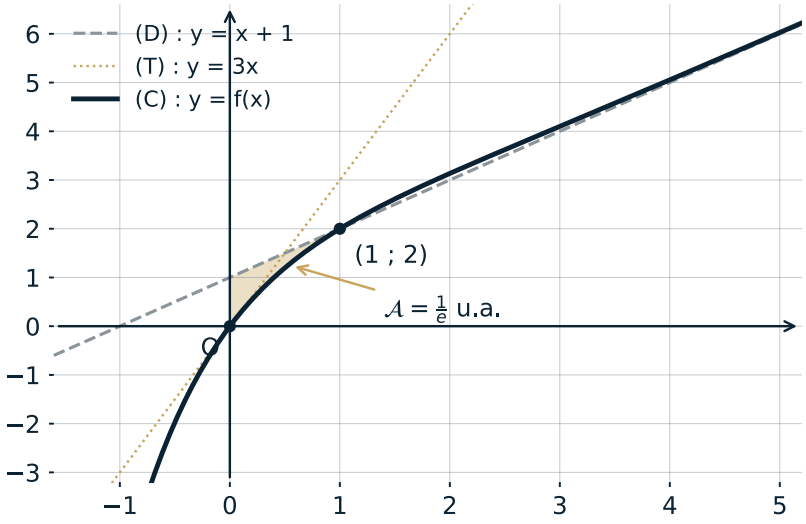


Figure 2 : courbe (C), asymptote (D), tangente (T) et domaine de la partie C (en or).

> ⚠️ **ERREUR FRÉQUENTE**
>
> En $+\infty$, ne pas écrire « $(x-1)\mathrm{e}^{-x} \to \infty \times 0$ donc 0 » : c'est une forme indéterminée. Il faut développer et citer la croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Problème II — Partie B

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$. Donc

$$h'(x) + h(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x + 1 + x\mathrm{e}^{-x} = x + 2 + \mathrm{e}^{-x}.$$

h est une solution de (E').

2. Comme $h' + h = x + 2 + \mathrm{e}^{-x}$:

$$\varphi' + \varphi = x + 2 + \mathrm{e}^{-x} \iff \varphi' + \varphi = h' + h \iff (\varphi - h)' + (\varphi - h) = 0.$$

φ est solution de (E') si et seulement si $\varphi - h$ est solution de (E_0).

3. (E_0) s'écrit $y' = -y$; ses solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, les solutions de (E') sont les fonctions

$$\boxed{\varphi_C(x) = x + 1 + (x + C)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

4. $\varphi_C(0) = 0 + 1 + C = 1 + C$. Donc $\varphi_C(0) = 0 \iff C = -1$. La solution correspondante est $\varphi_{-1}(x) = x + 1 + (x-1)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$. **$f$ est l'unique solution de (E') qui s'annule en 0.**

> 📌 **À RETENIR**
>
> Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-ax}$. Solution générale de $y' + ay = u(x)$ = solution particulière + solution générale de l'équation sans second membre.

Problème II — Partie C

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \boxed{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}$.

2. Posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$; alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0\,;1]$, donc

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\,I_n.$$

D'où $I_{n+1} = (n+1)I_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. Avec $n = 0$: $I_1 = I_0 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \boxed{1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}}$. Avec $n = 1$: $I_2 = 2I_1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \boxed{2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}}$.

4. Sur $[0\,;1]$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (D) (partie A, 4.), donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left[(x+1) - f(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = I_0 - I_1 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **u.a.** L'unité graphique étant 2 cm, 1 u.a. $= 4\ \mathrm{cm}^2$: $\mathcal{A} = \dfrac{4}{\mathrm{e}}\ \mathrm{cm}^2 \approx 1{,}47\ \mathrm{cm}^2$.

5. a) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Sur $[0\,;1]$, $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$: la fonction à intégrer est négative et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. **La suite (I_n) est décroissante.**

b) Pour $x \in [0\,;1]$: $0 < \mathrm{e}^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq x^n\mathrm{e}^{-x} \leq x^n$. Par positivité de l'intégrale $(0 < 1)$:

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

> 💡 ***ASTUCE EN MALAGASY***
>
> *Amin'ny intégration par parties, safidio ho u ilay ampahany izay lasa tsotra rehefa derivena (eto : x^{n+1}). (Choisis pour u le facteur qui se simplifie en dérivant.)*

Ce qu'il faut retenir de ce sujet

- **Restes de a^n modulo m** : chercher la période (ici $2^3 \equiv 1\ [7]$), puis raisonner sur le reste de n dans la division par cette période.
- **Équation $ax + by = c$** : solution particulière, soustraction, théorème de Gauss, sans oublier la réciproque.
- **Similitude directe** : rapport $= \frac{A'B'}{AB}$, angle $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$; en complexe $z' = az + b$, centre $\frac{b}{1-a}$; une composée de similitudes à angle π ou 0 est une homothétie.
- **Asymptote oblique** : étudier $f(x) - (ax + b)$, qui donne à la fois la limite et la position relative.
- **Suites d'intégrales** : relation de récurrence par intégration par parties, monotonie par le signe de $I_{n+1} - I_n$, limite par encadrement.

Tu as aimé cet extrait ? Le livre complet t'attend.

Cet extrait gratuit contient **1 sujet sur 10** et **1 fiche de cours sur 8**. Le livre complet, c'est **141 pages** :

- **10 sujets types complets** au format de l'épreuve, du plus accessible au BAC blanc final ;
- **10 corrigés détaillés**, rédigés comme une copie modèle ;
- **8 fiches de cours** qui couvrent tout le programme de Terminale C ;
- un **plan de révision en 10 semaines** et une grille de suivi.

Prix : 45 000 Ar (PDF envoyé sur WhatsApp). Pack famille CEPE + BEPC + BAC : 90 000 Ar.

Commande sur WhatsApp : +261 38 13 199 79 · milagnetsara.pages.dev/examens.html